Räumliche Veranschaulichung Polareuklidischer Kreise

Thomas Neukirchner

Oktober 2026

1 Polareuklidische Kreise

Ausgangspunkt dieser Betrachtung ist die Frage, wie man eine Vorstellung davon gewinnen kann, dass in der polareuklidischen Geometrie das Dual eines gewöhnlichen Kreises ein Kegelschnitt ist, dessen einer Brennpunkt mit dem Nahpunkt zusammenfällt. Es stellt sich sogleich auch die Frage, welche Bedeutung dann der zweite Brennpunkt hat, wenn man den Kegelschnitt wieder zurück dualisiert.

Bei Kegelschnitten ist es oft naheliegend, den Raum zu Hilfe zu nehmen, wie schon der Name sagt. Einen Kegelschnitt mit einen seiner Brennpunkte kann man am einfachsten wie folgt räumlich darstellen: Ein Kreiskegel schneidet eine Ebene in einen Kegelschnitt. Dem Kegel und der Ebene ist eine Kugel einbeschrieben. Dann ist der Berührpunkt N der Kugel mit der Ebene nach Dandelin einer der Brennpunkte des Kegelschnitts.

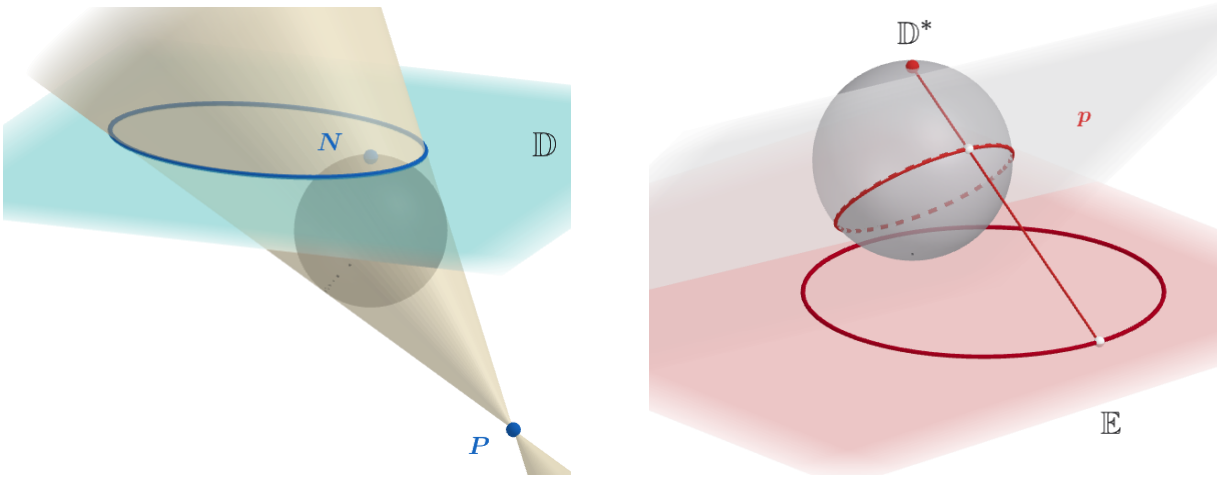


Abbildung 1: Links: Ein dualeuklidischer Kreis als schräger Schnitt eines runden Kreiskegels. Polar dazu rechts: Ein euklidischer Kreis als stereografische Projektion eines Schnittkreises mit der Sphäre.

Wir fassen die Ebene als Dualeuklidische Ebene $\mathbb{D}$ mit Nahpunkt N auf. Alle dualeuklidischen Kreise in dieser Ebene ergeben sich als Schnitte mit Kegeln, die diese ausgezeichnete Kugel berühren. Genau genommen müssen wir uns den Kegel aus Ebenen gebildet vorstellen, dessen Schnitt mit der ausgezeichneten Ebene einen geradenhaften Kegelschnitt hervorbringt.

Die Dualisierung einer solchen Kegel-Konfiguration sollte nun auf einen euklidischen Kreis führen. Dazu nutzen wir die Polarität an der ausgezeichneten Sphäre: Der Kegel besteht aus allen Ebenen der Sphäre durch den Punkt P. Das polare Gebilde besteht also aus allen Punkten der Sphäre, die in der polaren Ebenen enthalten sind, also aus den Schnittpunkten der Sphäre mit der zu P polaren Ebenen p, einem Schnittkreis. Der Kegel wurde schließlich geschnitten mit dem Punkt- und Geradenfeld $\mathbb{D}$. Polar wird also der Schnittkreis auf der Sphäre verbunden mit dem zu $\mathbb{D}$ polaren Bündel $\mathbb{D}^*$, das seinen Trägerpunkt in N hat. Wir sind es nicht gewohnt, euklidische Geometrie im Bündel zu betreiben, daher schneiden wir das Bündel noch mit einer passenden Ebene. Die zum Nahpunkt N polare Ebene ist $\mathbb{D}$. Diese entspricht also der Ferngeraden im Bündel $\mathbb{D}^*$. Daher müssen wir als Schnittebene eine zu $\mathbb{D}$ parallele Ebene wählen, z.B. die Ebene am Südpol der Sphäre. Der entstandene Schnitt ist nun tatsächlich ein euklidischer Kreis, da die Projektion eines Schnittkreises der Sphäre aus dem Nordpol auf die Tangentialebene am Südpol wieder

ein Kreis ist, wie seit Ptolemäos bekannt als Kreistreue der stereografischen Projektion. Einen schönen elementargeoemtrischen Beweis dazu findet man in [Gla22][S. 175f].

2 Mittelpunkt und Mittelgerade von Kreisen

Als nächstes wollen wir der Frage nachgehen, wie man den Mittelpunkt des euklidischen Kreises bzw. die Mittelgerade des dualeuklidischen Kreises in obigen Bild findet. Die Mittelgerade ist die Polare zum Nahpunkt, also die Leitgerade des Kegelschnitts in Bezug auf diesen Brennpunkt. Auch diese ergibt sich direkt aus der Dandelinfigur: Es ist der Schnitt der Ebenen p und $\mathbb{D}$. Polar dazu verbindet man die Kegelspitze P mit $\mathbb{D}^*$ und projiziert in die Ebene $\mathbb{E}$.

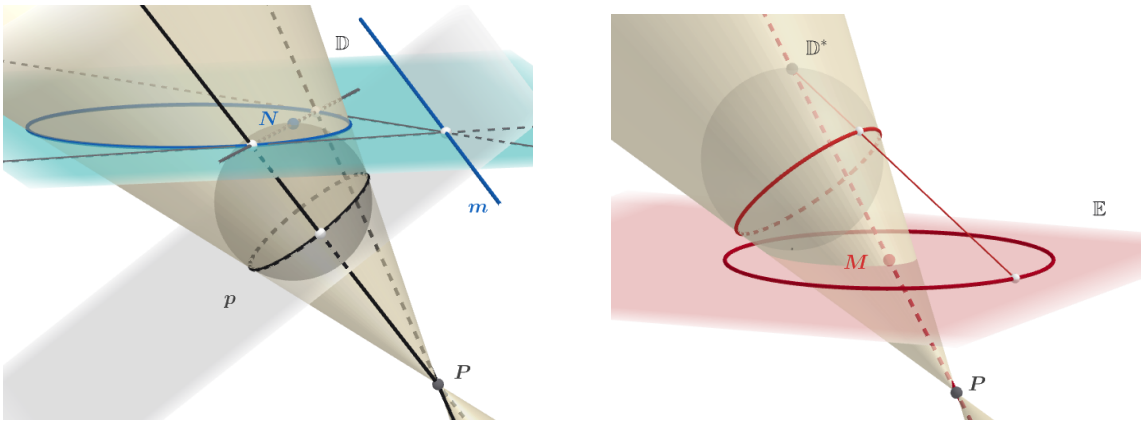


Abbildung 2: Mittelgerade m als Schnittgerade $p \cap \mathbb{D}$ und Mittelpunkt M entsprechend dem Strahl $P \cup \mathbb{D}^*$.

Daraus ergibt sich ein einfaches Bild dualeuklidischer Kreise mit einer gemeinsamen Mittelgeraden entsprechend den konzentrischen Kreisen der Euklidischen Geometrie. Für letztere betrachtet man eine Kegelschar, deren Spitzen auf einer festen Geraden m^* durch N liegen. Die polaren Ebenen sind im Büschel der zu m^* polaren Geraden m enthalten und schneiden die Sphäre in einer Schar konzentrischer Kreise. Die Schnitte der Kegel erzeugen somit d-Kreise mit der gemeinsamen Mittelgerade m. Man könnte sie *kon-peripher* nennen.

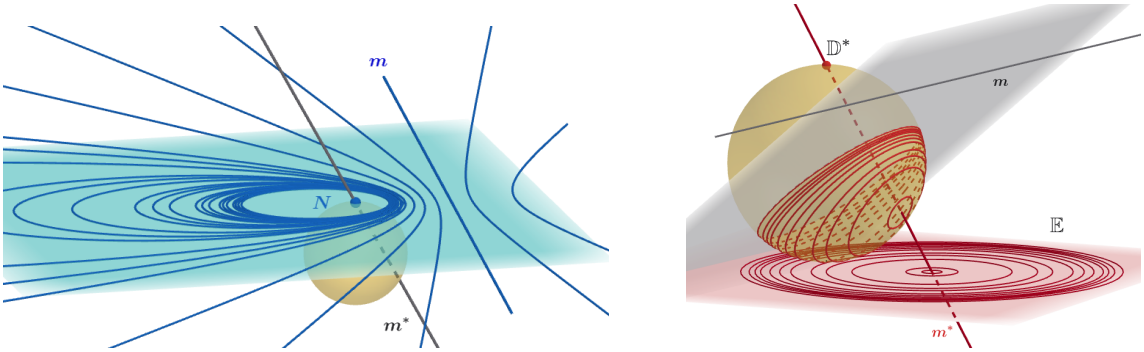


Abbildung 3: Eine konperiphere d-Kreisschar mit gemeinsamer Mittelgerade m und polar dazu eine konzentrische Kreisschar.

3 Euklidisch, Dualeuklidisch, Polareuklidisch

Nehmen wir nochmal etwas genauer in den Blick, wie sich in diesem räumlichen Bild die polareuklidische Geometrie manifestiert. Die dualeuklidische Ebene $\mathbb{D}$ mit ihrem ausgezeichneten Nahpunkt N ist realisiert als Tangentialebene an den Nordpol einer Einheitssphäre. Die Polarität an dieser Sphäre überführt das Feld $\mathbb{D}$ zunächst in ein Bündel $\mathbb{D}^*$, das durch die ausgezeichnete Ebene polar zu N zu einem Euklidischen Bündel wird. Durch Schnitt mit einer zu $\mathbb{D}$ parallelen Ebene $\mathbb{E}$ erhalten wir die Euklidische Ebene mit

der gewöhnlichen Lage der Ferngeraden. Wir wählen dazu die Tangentialebene am Südpol S der Sphäre. Dieser Punkt ist aber kein ausgezeichneter Punkt in $\mathbb{E}$. Schließlich führt erneutes Polarisieren zu einem Dualeuklidischen Bündel $\mathbb{E}^*$.

Das Besondere der Polareuklidischen Geometrie ist nun gerade, dass man sich die beiden Ebenen $\mathbb{D}$ und $\mathbb{E}$ vereinigt denken muss, so als würde man vom Fernpunkt der Nord-Südachse blicken und entsprechende Punkte in $\mathbb{E}$ und $\mathbb{D}$ miteinander identifizieren. Anders ausgedrückt: Indem man an der Äquatorebene spiegelt, vertauscht man die Rollen von $\mathbb{D}$ und $\mathbb{E}$. So kann man auf eine duakeuklidische Konfiguration mit Euklidischen Begriffen schauen, man kann sie *euklidisieren*. Dies werden wir im nächsten Abschnitt nutzen. Mehr dazu in [Die21] und [Bau26].

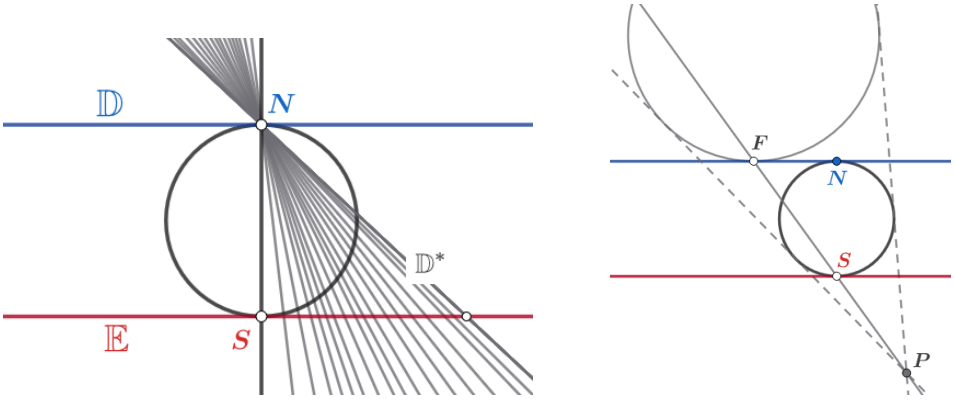


Abbildung 4: Links: Das hier vorgestellte räumliche Modell der polareuklidischen Geometrie. Rechts: Der zweite Brennpunkt F eines d-Kreises.

4 Konfokale d-Kreise und konchordale e-Kreise

Als nächstes wollen wir uns der Frage nach dem zweiten Brennpunkt eines d-Kreises zuwenden. Es muss an dieser Stelle nochmal betont werden, dass innerhalb der reinen dualeuklidischen Geometrie diese Frage nicht beantwortet werden kann. In ihr erscheinen d-Kreise schlicht als beliebige Kegelschnitt, ohne eine ausgezeichnete Lage des Nahpunktes. Erst die Vereinbarung, dass Nahstrahlen zu orthogonalen Punkten auch im Euklidischen Sinne als orthogonal erscheinen sollen, führt darauf, dass der Nahpunkt in einem Brennpunkt des Kegelschnitts liegen muss, weil dort konjugierte Strahlen orthogonal sind. Diese Eigenschaft gilt natürlich auch für den zweiten Brennpunkt, wobei man mit der Betrachtung orthogonaler Geraden endgültig in der Euklidischen Perspektive angelangt ist.

Nach Dandelin ergibt sich auch der zweite Brennpunkt F als Berührpunkt mit einer Sphäre, die dem Kegel und der Ebene $\mathbb{D}$ einbeschrieben ist, siehe Abb. 4. Aus dieser Figur wird sofort deutlich, dass der zweite Brennpunkt F auf der Verbindungsgeraden $\overline{PS}$ liegt. Die dazu polare Ebene f geht also durch die Schnittgerade der Ebene p mit der Südpolebene $\mathbb{E}$. Wie verhält sich diese Gerade zum polaren Kreis?

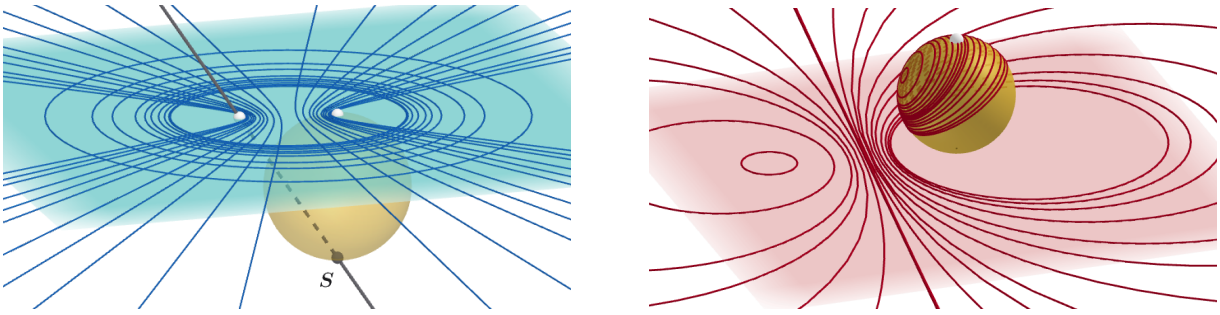


Abbildung 5: Konfokale Kegelschnitte als d-Kreise: ein Brennpunkt ist N, der andere ein beliebieger fester Punkt. Polar dazu eine Apollonius-Kreisschar, also eine Kreisschar, die eine gemeinsame Chordale hat und zusätzlich den Punkt S als Kreis mit Radius Null enthält.

Um hierfür ein Gespür zu bekommen, bringen wir die Figur in Bewegung: Anstelle eines einzelnen d-Kreises betrachten wir die gesamte Schar konfokaler Kegelschnitte mit zweiten Brennpunkt F. Diese Schar

ergibt sich als Schnitt aller Kegel tangential an die Sphäre, deren Spitze P auf der Verbindungsgeraden $\overline{PS}$ liegt. Die dazu polare Kreisschar in $\mathbb{E}$ ergibt ein vertrautes Bild: Es sind offensichtlich die Kreise des Appolonius, wobei S ein Verschwindungspunkt der Kreisschar ist.

Die Kreisschar des Appolonius lässt sich aber auch charakterisieren als alle Kreise mit einer gemeinsamen Chordalen. Diese Eigenschaft der Kreise ist mit Hilfe der räumlichen Sichtweise leicht einzusehen: Die Chordale zweier sich schneidender Kreise ist die Verbindungsgerade der beiden Schnittpunkte. In der stereografischen Projektion ergibt sich die Chordale also aus der Projektion der Schnittgeraden der beiden Ebenen, deren Schnitt mit der Sphäre den beiden Kreisen entsprechen, siehe Abbildung 6 links. Diese Eigenschaft überträgt sich nun aber auch auf Kreise mit imaginären Schnittpunkten.

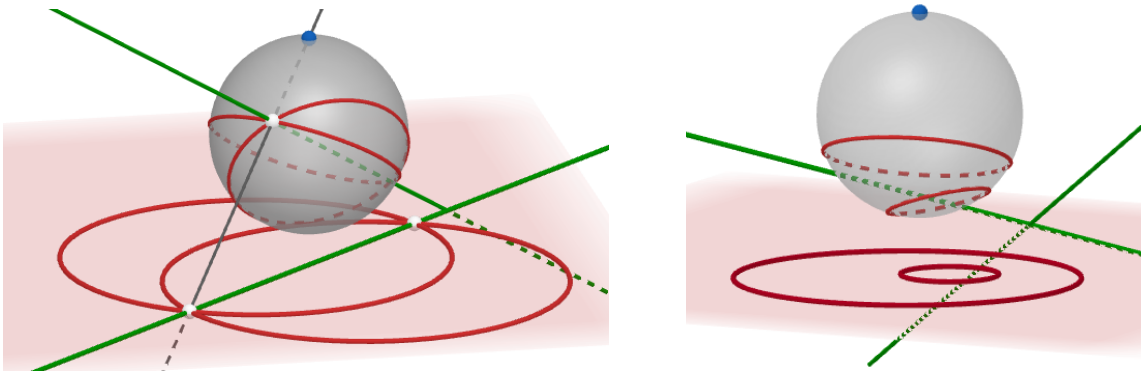


Abbildung 6: Die Chordale zweier Kreise ergibt sich als Projektion der Schnittgeraden ihrer Schnittebenen.

5 Überblick

Zum Abschluss wollen wir einen Überblick geben über die hier eingeführten euklidischen Elemente und ihre polareuklidischen Entsprechungen im räumlichen Modell einer Sphäre.

(i)	**Dualeuklidische Ebene $\mathbb{D}$ mit Nahpunkt N:** Tangentialebene am Nordpol N der Sphäre.	**Euklidische Ebene $\mathbb{E}$:** Bündel $\mathbb{D}^*$∗ mit Trägerpunkt N, geschnitten mit der parallelen Ebene am Südpol S.
(ii)	**d-Kreis:** Punkt P im Raum, verbunden mit der Sphäre, geschnitten mit $\mathbb{D}$. • P auf Sphäre ⇒ Entartung zur Geraden. • P in $\mathbb{D}$ ⇒ Entartung zum Punkt.	**e-Kreis:** Ebene p im Raum, geschnitten mit der Sphäre, projiziert aus $\mathbb{D}^*$. • p an Sphäre ⇒ Entartung zum Punkt. • p in $\mathbb{D}^*$ ⇒ Entartung zur Geraden.
(iii)	**Mittelgerade eines d-Kreises:** Schnitt der zu P polaren Ebene p mit $\mathbb{D}$	**Mittelpunkt eines e-Kreises:** Projektion des zu p polaren Punktes P aus $\mathbb{D}^*$
(iv)	**Konperifere d-Kreise:** Punktreihe m^*, die den Punkt N enthält. Die gemeinsame Mittelgerade ist die dazu polare Gerade m.	**Konzentrische e-Kreise**: Ebenenbüschel m, das die Ebene $\mathbb{D}$ enthält. Der gemeinsame Mittelpunkt gehört zu der polaren Geraden m^*.
(v)	**Konfokale d-Kreise:** Punktreihe m^*, die den Südpol S enthält. Der Schnittpunkt mit $\mathbb{D}$ ist gemeinsamer Brennpunkt der Kegelschnitte.	**Konchordale e-Kreise, die S enthalten**: Ebenenbüschel m, das die Ebene $\mathbb{E}$ enthält. m ist die gemeinsame Chordale aller Kreise.

Die hier gegebenen Beschreibungen beziehen sich auf die räumliche Beschreibung. Als Projektion in eine polareuklidische Ebene fallen N und S zusammen. Die konchordale Kreisschar polar zu den konfokalen d-Kreisen enthält also den Nahpunkt N als Kreis mit Radius Null, so wie konfokale d-Kreisschar die Ferngerade als Entartung enthält.

Als nächstes würde es sich lohnen, die orthogonale Kreisschar zu den Apolloniuskreisen anzuschauen: Auch diese Kreisschar ist eine konchordale Kreisschar. Die diesen beiden Kreisscharen entsprechenden räum-

lichen Geraden sind polar zueinander. Insbesondere gilt der in der Abbildung 7 dargestellte Zusammenhang zwischen polare Orthogonalität und zueinander polaren räumlichen Geraden.

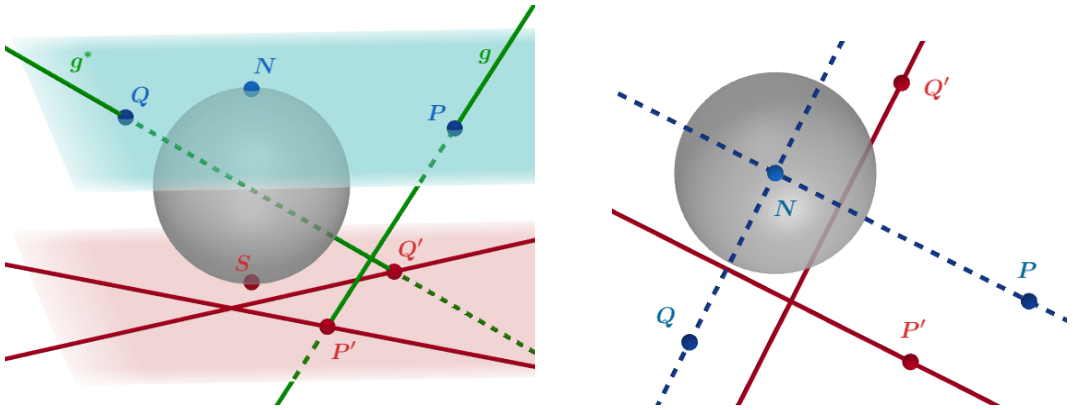


Abbildung 7: Die Projektion aus $\mathbb{D}^*$ zu zwei zueinander polaren Geraden g und g^* ergibt ein orthogonales Geradenpar in $\mathbb{E}$. Polar dazu ergibt der Schnitt der beiden Geraden mit $\mathbb{D}$ ein orthogonales Punktepaar.

Weiter könnte man allgemeine konchordale Kreisscharen betrachten, bei denen der Nachpunkt N nicht mehr Teil der Kreisschar ist sondern allgemeine Lage hat. Welche Eigenschaften haben die dazu polaren d-Kreisscharen?

6 Die Sphäre als imaginäre Regelschar

Die stereografische Projektion kann auch auf andere Quadriken übertragen werden, wie z.B. eine Regelschar: Aus einem festen Punkt O der Fläche werden alle Punkte der Fläche auf eine beliebige Ebene projiziert. Die ausgezeichnete Leit- und Regelgerade durch O werden dabei zu zwei Punkten O' und O'', alle anderen Regelgeraden werden auf das Büschel in O', die Leitgeraden auf das Büschel in O'' projiziert. Ein beliebiger Ebener Schnitt der Regelfläche wird bei Projektion zu einem Kegelschnitt durch O' und O''.

Beim Übertragen dieser Konstruktion auf die Sphäre werden die Regel- und Leitgeraden zu konjugiert komplexen Geraden. Die beiden ausgezeichneten Geraden durch den Nordpol N Treffen die absolute Quadrik der Euklidischen Geometrie in zwei Punkten I und J, die auch in der gegenüberliegenden Tangentialebene $\mathbb{E}$ am Südpol S der Kugel liegen. Die Projektionen von ebenen Schnitten der Sphäre werden also auf Kegelschnitte projiziert, die durch die beiden Punkte I und J gehen, also auf Kreise! Dies macht die Kreistreue der stereografischen Projektion von einem höheren Standpunkt aus verständlich.

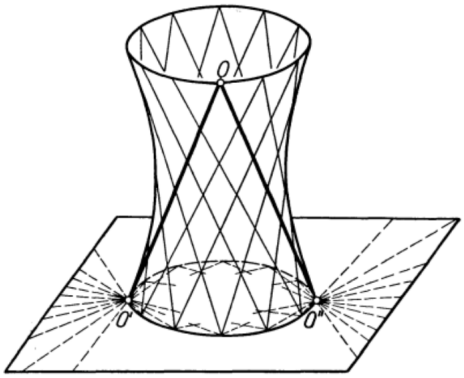


Abbildung 8: Stereografische Projektion vom Punkt O einer Regelschar aus [Kle26][S. 185].

Literatur

[Bau26] Peter Baum. Skizze der polareuklidischen geometrie. unveröffentlichtes Skript, 2026.

[Die21] Immo Diener. *Polareuklidische Geometrie*. Springer Berlin Heidelberg, 2021.

[Gla22] Georg Glaeser. *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2022.

[Kle26] Felix Klein. *Vorlesungen Über Höhere Geometrie*. Springer-Verlag Berlin, 1926.